



Національний університет
водного господарства та природокористування

Міністерство освіти і науки України

Національний університет
водного господарства та природокористування

Навчально-науковий механічний інститут

Кафедра транспортних технологій і технічного сервісу

02-02-120



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з навчальної дисципліни

«Дослідження операцій в транспортних системах»
для здобувачів вищої освіти першого
(бакалаврського) рівня за спеціальністю
275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)»
денної та заочної форм навчання
(Частина 1)

Рекомендовано методичною
комісією зі спеціальності
275 «Транспортні технології
(на автомобільному транспорті)»
Протокол № 6 від 20.02.2019 р.

Рівне – 2019



Методичні вказівки до практичних занять з навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» (Частина І) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» денної та заочної форм навчання / Кристопчук М. Є., Кучер О. О., Макарічев О. В. – Рівне : НУВГП, 2019. – 47 с.

Укладачі:

Кристопчук М. Є., к.т.н., доцент кафедри транспортних технологій і технічного сервісу; Кучер О. О., старший викладач кафедри транспортних технологій і технічного сервісу; Сорока В. С., к.с-г.н., доцент кафедри транспортних технологій і технічного сервісу; Макарічев О. В., д.ф.-м.н., професор кафедри транспортних технологій і технічного сервісу.



Відповідальний за випуск – М. Є. Кристопчук, к.т.н., доцент, завідувач кафедри транспортних технологій і технічного сервісу.

© Кристопчук М. Є., Кучер О. О.,
Сорока В. С., Макарічев О. В., 2019
© Національний університет
водного господарства та
природокористування, 2019



ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| Загальні положення..... | 3 |
| 1. Опис навчальної дисципліни та структура залікового кредиту..... | 4 |
| 2. Методичні рекомендації до виконання практичних завдань..... | 5 |
| Практичне заняття 1. Формалізація задач дослідження операцій..... | 5 |
| Практичне заняття 2. Графічний метод вирішення задач лінійного програмування..... | 10 |
| Практичне заняття 3. Застосування методів лінійного програмування для вирішення виробничих задач..... | 14 |
| Практичне заняття 4. Транспортна задача..... | 17 |
| Практичне заняття 5. Розподільча задача лінійного програмування..... | 24 |
| Практичне заняття 6. Задачі управління запасами..... | 30 |
| Практичне заняття 7. Задачі управління запасами з урахуванням знижок..... | 33 |
| 3. Рекомендована література..... | 41 |
| 4. Додатки..... | 42 |

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Студенти повинні **уміти**: самостійно складати математичні моделі складних транспортних систем; застосовувати методи оптимізації для вирішення виробничих задач; застосовувати ПЕОМ і сучасні програмні продукти при вирішенні оптимізаційних задач.

Мета методичних вказівок – допомогти студентам закріпити теоретичний матеріал з дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» на основі самостійного вирішення практичних завдань.

У процесі виконання завдань студенти глибше опановують питання побудови і аналізу моделей функціонування транспортних систем, показників для оцінки ефективності транспортних операцій із застосуванням математичного інструментарію дослідження операцій, а також розвитку творчих здібностей та ініціативи при вирішенні поставлених завдань на практиці.

У методичних вказівках викладено послідовність виконання завдань. Роботу студенти виконують відповідно до варіантів, індивідуально з допоміжними розрахунками. Студенти передають викладачеві виконані завдання для перевірки з подальшим їх захистом.



1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ТА СТРУКТУРА ЗАЛІКОВОГО КРЕДИТУ

| Найменування показників | Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти | Характеристика навчальної дисципліни | |
|--|---|--------------------------------------|-----------------------|
| | | денна форма навчання | заочна форма навчання |
| Кількість кредитів – 5 | Галузь знань 27 «Транспорт» | Фундаментальна дисципліна | |
| Модулів – 1 | Спеціальність 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» | Рік підготовки: | |
| Змістових модулів – 2 | | 3-й | 5-й |
| Індивідуальне науково-дослідне завдання: <i>не передбачене</i> | | Семестр | |
| Загальна кількість годин – 150 | | 5-й | 9-й |
| Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 самостійної роботи студента – 6 | Рівень вищої освіти: бакалавр | Лекції | |
| | | 30 год. | 2 год. |
| | | Практичні, семінарські | |
| | | 30 год. | 10 год. |
| | | Лабораторні | |
| | | - | - |
| | | Самостійна робота | |
| | | 90 год. | 138 год. |
| | | Індивідуальні завдання: | |
| | | - | |
| | | Вид контролю: екзамен | |

Примітка.

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить (%):

- для денної форми навчання – 66,7%;
- для заочної форми навчання – 8,7%.



2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. МОДЕЛІ ТА ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Практичне заняття 1

Тема: Формалізація задач дослідження операцій.

Мета заняття: набути практичних навичок у студентів із складання цільової функції та рівнянь обмежень задачі лінійного програмування.

Норма часу (за навчальною програмою): 2 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 1.

Для виробництва трьох видів виробів (A, B, C) використовується сировина типів I, II та III, причому закупівля сировини типу I та III обмежена можливостями постачальників. В табл. 1.1 наведені норми витрат сировини, ціни на сировину та на вироби, а також обмеження по закупівлі сировини.

Необхідно скласти план виробництва продукції з метою отримання максимального прибутку.

Таблиця 1.1

Норми витрат, ціни на сировину та вироби, обмеження

| Тип сировини | Вартість 1 кг сировини, у.о. | Норми витрат сировини на один виріб, кг | | | Обмеження по закупівлі сировини, кг |
|--------------|------------------------------|---|---------|-----|-------------------------------------|
| | | A | B | C | |
| I | 2 | 1 | 3 | a | 3000 |
| II | 1 | 4 | 1 | 3 | - |
| III | b | 6 | 5 | 2 | 3320 |
| | Вартість одного виробу, у.о. | $6b+12$ | $5b+22$ | c | |

Початкові дані згідно варіанту подано в табл. 1.2.



Таблиця 1.2

Початкові дані до розрахунку задачі 1

| № вар. | Початкові дані | | | № вар. | Початкові дані | | |
|-----------|----------------|----------|----------|-----------|----------------|----------|----------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. | 2 | 1 | 17 | 16. | 4 | 1 | 27 |
| 2. | 2 | 2 | 19 | 17. | 4 | 2 | 26 |
| 3. | 2 | 3 | 21 | 18. | 4 | 2 | 27 |
| 4. | 2 | 4 | 23 | 19. | 4 | 3 | 28 |
| 5. | 3 | 1 | 21 | 20. | 4 | 3 | 30 |
| 6. | 3 | 1 | 22 | 21. | 4 | 4 | 30 |
| 7. | 3 | 2 | 23 | 22. | 4 | 4 | 32 |
| 8. | 3 | 2 | 24 | 23. | 2 | 2 | 20 |
| 9. | 3 | 2 | 25 | 24. | 1 | 2 | 15 |
| 10. | 3 | 3 | 25 | 25. | 3 | 2 | 20 |
| 11. | 3 | 3 | 26 | 26. | 3 | 1 | 25 |
| 12. | 3 | 4 | 26 | 27. | 2 | 1 | 15 |
| 13. | 4 | 1 | 25 | 28. | 2 | 4 | 19 |
| 14. | 3 | 2 | 22 | 29. | 1 | 2 | 20 |
| 15. | 1 | 3 | 25 | 30. | 2 | 3 | 30 |

Задача 2.

Металургійний цех в якості сировини закуповує латунь типів I, II та III – різні за складом сплави міді та цинку (з деякими добавками) – та переплавляє цю сировину в співвідношенні 1:1:3, для того щоб отримати сплав, який містить 57 % міді та 34 % цинку.

З'явилась можливість закуповувати сировину нових типів IV, V та VI. Характеристики сировини кожного типу наведені в табл. 1.3. Яку сировину необхідно закуповувати тепер цеху, і в яких пропорціях переплавляти, щоб випускати той же сплав, витрачаючи на сировину якомога менше коштів?

Таблиця 1.3

Характеристика типів сировини для виробництва сплаву

| Тип сировини | Вміст міді, % | Вміст цинку, % | Вартість, у.о./кг |
|--------------|------------------|----------------|----------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| I | 75 | 20 | 5 |



| | | | |
|-----|-----|----------|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| II | 60 | 30 | 3 |
| III | 50 | 40 | 2 |
| IV | a | $95 - a$ | c |
| V | b | $90 - b$ | 2 |
| VI | 45 | 40 | 1 |

Початкові дані згідно варіанту подано в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Початкові дані до розрахунку задачі 2

| № вар. | Початкові дані | | | № вар. | Початкові дані | | |
|-----------|----------------|-----|-----|-----------|----------------|-----|-----|
| | a | b | c | | a | b | c |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. | 72 | 58 | 4,2 | 16. | 68 | 58 | 3,2 |
| 2. | 72 | 60 | 4 | 17. | 74 | 58 | 4,6 |
| 3. | 72 | 62 | 4,2 | 18. | 74 | 60 | 4,4 |
| 4. | 72 | 62 | 4 | 19. | 74 | 62 | 4,6 |
| 5. | 72 | 65 | 4,2 | 20. | 74 | 64 | 4,4 |
| 6. | 72 | 70 | 4,2 | 21. | 74 | 65 | 4,6 |
| 7. | 68 | 58 | 3,4 | 22. | 74 | 70 | 4,6 |
| 8. | 68 | 60 | 3,2 | 23. | 73 | 56 | 3,2 |
| 9. | 68 | 62 | 3,4 | 24. | 73 | 58 | 4,6 |
| 10. | 68 | 64 | 3,2 | 25. | 73 | 61 | 4,4 |
| 11. | 68 | 65 | 3,4 | 26. | 73 | 59 | 4,8 |
| 12. | 68 | 70 | 3,4 | 27. | 72 | 61 | 3,6 |
| 13. | 72 | 60 | 4,2 | 28. | 71 | 69 | 3,2 |
| 14. | 70 | 65 | 3,2 | 29. | 70 | 64 | 4,2 |
| 15. | 74 | 64 | 4,4 | 30. | 71 | 58 | 3,4 |

Задача 3.

Для копання котлована об'ємом $a \text{ м}^3$ будівельники отримали три екскаватори.

Екскаватор ЕО-4121 продуктивністю $\Pi_1=22,5 \text{ м}^3/\text{год}$ витрачає за годину $Q_1=10$ літрів/годину дизельного палива.



Характеристики екскаваторів ЕО-3323 та ЕО-2621 складають відповідно: $P_2 = 10 \text{ м}^3/\text{год}$, $Q_2 = b \text{ л/год}$; $P_3 = 5 \text{ м}^3/\text{год}$, $Q_3 = 2 \text{ л/год}$.

Екскаватори можуть працювати одночасно, не заважаючи один одному.

Запас палива у будівельників обмежений і рівний c літрів.

Відомо, якщо копати котлован лише екскаватором ЕО-2621, то дизельного палива вистачить, але це займе дуже багато часу.

Визначити, як необхідно використовувати дану техніку, для того щоб час на будівництво котлована був мінімальним.

Початкові дані згідно варіанту подано в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Початкові дані до розрахунку задачі 3

| № вар. | Вихідні дані | | | № вар. | Вихідні дані | | |
|-----------|--------------|------|-----|-----------|--------------|------|-----|
| | a | b | c | | a | b | c |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. | 1350 | 10/3 | 548 | 16. | 1380 | 4 | 580 |
| 2. | 1080 | 4 | 460 | 17. | 1620 | 11/3 | 666 |
| 3. | 1080 | 11/3 | 444 | 18. | 1500 | 4 | 630 |
| 4. | 1440 | 10/3 | 580 | 19. | 1980 | 10/3 | 800 |
| 5. | 1140 | 4 | 480 | 20. | 1890 | 11/3 | 780 |
| 6. | 1350 | 11/3 | 552 | 21. | 1860 | 4 | 780 |
| 7. | 1620 | 10/3 | 656 | 22. | 1140 | 4 | 470 |
| 8. | 2160 | 11/3 | 888 | 23. | 1520 | 10/3 | 600 |
| 9. | 1200 | 4 | 500 | 24. | 1680 | 11/3 | 715 |
| 10. | 1320 | 4 | 550 | 25. | 1200 | 11/3 | 768 |
| 11. | 1890 | 11/3 | 777 | 26. | 1320 | 10/3 | 512 |
| 12. | 1200 | 4 | 510 | 27. | 1460 | 11/3 | 758 |
| 13. | 1800 | 10/3 | 728 | 28. | 1970 | 4 | 650 |
| 14. | 1600 | 3 | 460 | 29. | 1360 | 11/3 | 480 |
| 15. | 1280 | 4 | 520 | 30. | 1480 | 10/3 | 520 |

Вказівки до розв'язання практичного завдання 1

В загальному випадку, задача лінійного програмування може бути сформульована наступним чином.

$$Q(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n, \quad (1.1)$$

приймає мінімальне (максимальне) значення на множині точок, координати яких задовольняють умови:

[illegible]

На початковому етапі вирішення оптимізаційних задач необхідно скласти математичну модель задачі, враховуючи фактори, від яких залежить кінцевий результат. Приклад складання математичних моделей виробничих задач наведено нижче.

Необхідно виготовити чотири види деталей A_i в кількостях від a_i до b_i ($i=1, 2, 3, 4$). Прибуток від реалізації однієї деталі складає p_i . На виготовлення кожної деталі A_i витрачається a_{ij} хвилин робочого часу на кожному із верстатів M_j ($j=1, 2, 3$), ресурс використання яких повинен бути в межах від n_j до m_j хвилин. Необхідно скласти такий план виробництва, щоб прибуток від реалізації деталей був максимальний.

Вводимо змінну x_i – кількість деталей виду A_i , які необхідно виготовити.

$$\begin{aligned} a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 + a_{4j}x_4 &\leq m_j \text{ для } j=1, 2, 3; \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 + a_{4j}x_4 &\geq n_j \text{ для } j=1, 2, 3; \\ x_i &\leq b_i, \quad x_i \geq a_i, \quad x_i \geq 0 \text{ для } i=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$



Прибуток від реалізації деталей (цільова функція):

$$P_{\max} \Rightarrow p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4.$$

Запитання до перевірки знань:

1. В чому полягає формалізація моделі транспортної системи?
2. Що таке критерій ефективності?
3. Що таке математична модель
4. Дайте визначення оптимального розв'язку (плану) задачі математичного програмування.
5. Що таке цільова функція задачі математичного програмування?
6. Як називається оптимальне значення цільової функції задачі математичного програмування?

Практичне заняття 2

Тема: Графічний метод вирішення задач лінійного програмування.

Мета заняття: Вивчення застосування графічного методу для вирішення задач лінійного програмування.

Норма часу (за навчальною програмою): 4 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 4.

Нафтопереробний завод може використовувати дві різні технології перегонки нафти для виробництва бензину, гасу, солярового масла. В табл. 2.1 наведені дані, які вказують вихід продукції, відходи, виробничі витрати (вартість нафти, заробітна плата, амортизація та ін.) та завантаження обладнання в розрахунку на 1 т переробленої нафти. Крім того, вказані вартість 1 т готової продукції та добовий об'єм замовлення, який необхідно задовольнити.

Ресурс обладнання складає 75 маш-год на добу. Всі відходи повинні пройти через очисні споруди, продуктивність яких складає c т/добу. Надходження нафти та попит на всю продукцію заводу



необмежені. Скласти такий план випуску продукції за добу, при якому прибуток буде максимальним.

Таблиця 2.1

Характеристика виробничого процесу перегонки нафти

| Назва продукції | Вихід продукції, т | | Вартість 1 т готового продукту, у.о. | Добовий об'єм замовлення, т |
|------------------------------------|--------------------|---------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| | Технологія №1 | Технологія №2 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Бензин | 0,6 | 0,3 | 100 | 117 |
| Гас | 0,1 | 0,3 | 50 | 54 |
| Солярове масло | - | 0,3 | 20 | - |
| Відходи | 0,3 | 0,1 | - | - |
| Виробничі витрати, у.о. | <i>a</i> | <i>b</i> | | |
| Завантаження обладнання, маш.-год. | 0,2 | 0,05 | | |

Початкові дані згідно варіанту подано в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Початкові дані до розрахунку задачі 4

| № вар. | Початкові дані | | | № вар. | Початкові дані | | |
|--------|----------------|----------|----------|--------|----------------|----------|----------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. | 13 | 37 | 130 | 16. | 35 | 45 | 135 |
| 2. | 15 | 37 | 135 | 17. | 33 | 45 | 140 |
| 3. | 17 | 37 | 140 | 18. | 39 | 45 | 145 |
| 4. | 19 | 37 | 145 | 19. | 31 | 45 | 130 |
| 5. | 21 | 37 | 130 | 20. | 37 | 45 | 135 |
| 6. | 21 | 39 | 135 | 21. | 35 | 45 | 140 |
| 7. | 23 | 39 | 140 | 22. | 33 | 45 | 145 |
| 8. | 25 | 39 | 145 | 23. | 14 | 37 | 125 |

продовження табл. 2.2

| | | | | | | | | |
|-----|----|----|-----|--|-----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 9. | 29 | 41 | 130 | | 24. | 16 | 38 | 130 |
| 10. | 31 | 41 | 135 | | 25. | 18 | 40 | 135 |
| 11. | 37 | 43 | 140 | | 26. | 20 | 42 | 140 |
| 12. | 39 | 45 | 145 | | 27. | 30 | 42 | 130 |
| 13. | 37 | 45 | 130 | | 28. | 38 | 44 | 135 |
| 14. | 21 | 41 | 130 | | 29. | 37 | 40 | 125 |
| 15. | 23 | 43 | 135 | | 30. | 35 | 42 | 130 |

Вказівки до розв'язання практичного завдання 2

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Розглянемо задачу.

Знайти

$$\max(\min)L = c_1x_1 + c_2x_2 \quad , \quad (2.1)$$

за обмежень:

[illegible]

Припустимо, що система (2.2) за умов (2.3) сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування кожне i -те обмеження-нерівність у (2.2) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Умова (2.3) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору.

Розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (2.1) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків (див. рис. 2.1):

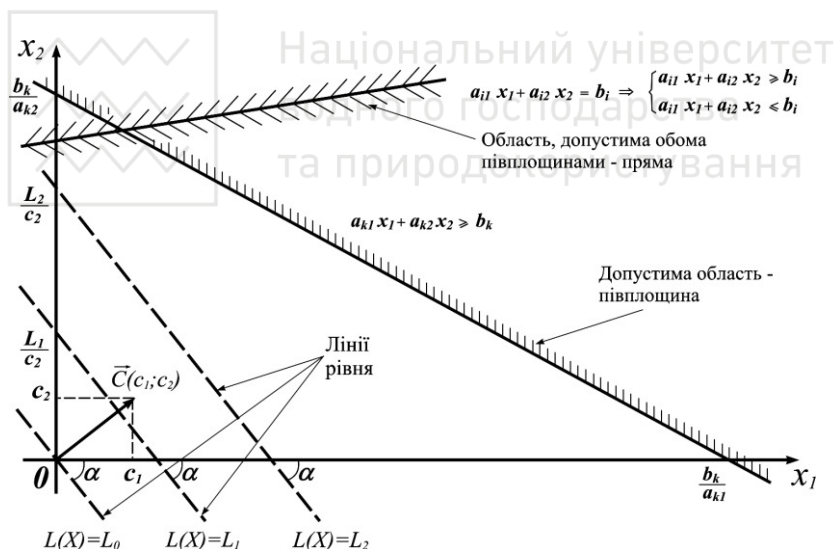


Рис. 2.1. Геометрична інтерпретація обмежень та цільової функції задачі лінійного програмування

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.2) знаків нерівностей на знаки рівності.



2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора \vec{N} .

6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора \vec{N} (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Запитання до перевірки знань:

1. Які кроки передбачає алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування?

2. Які варіанти розв'язків можливі у разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування?

3. На чому ґрунтується графічний метод вирішення задач лінійного програмування?

4. Для розв'язування яких задач використовується графічний метод вирішення задач лінійного програмування?

5. Чи використовується графічний метод для розв'язування чотирьохвимірних задач лінійного програмування?

Практичне заняття 3

Тема: Застосування методів лінійного програмування для вирішення виробничих задач.

Мета заняття: набути практичних навичок у студентів з розв'язання задач про розкрій матеріалів та календарного планування методами лінійного програмування.

Норма часу (за навчальною програмою): 2 год.



Завдання до виконання практичної роботи

Задача 5.

Для серійного виробництва рам зварної конструкції необхідні комплекти заготовок профільного прокату. Кожний комплект складається із a заготовок довжиною 1800 мм та b заготовок довжиною 700 мм. Яким чином необхідно розрізати c полос прокату стандартної довжини 6000 мм, щоб отримати максимальну кількість вказаних комплектів? Початкові дані згідно варіанту подано в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Початкові дані до розрахунку задачі 5

| № вар. | Початкові дані | | | № вар. | Початкові дані | | |
|-----------|----------------|-----|-----|-----------|----------------|-----|------|
| | a | b | c | | a | b | c |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. | 1 | 3 | 660 | 16. | 3 | 8 | 850 |
| 2. | 1 | 3 | 720 | 17. | 4 | 9 | 600 |
| 3. | 1 | 3 | 780 | 18. | 4 | 9 | 630 |
| 4. | 1 | 3 | 840 | 19. | 4 | 9 | 660 |
| 5. | 2 | 5 | 660 | 20. | 4 | 9 | 690 |
| 6. | 2 | 5 | 770 | 21. | 4 | 9 | 720 |
| 7. | 2 | 5 | 880 | 22. | 4 | 9 | 750 |
| 8. | 2 | 5 | 990 | 23. | 2 | 3 | 750 |
| 9. | 3 | 7 | 640 | 24. | 2 | 4 | 560 |
| 10. | 3 | 7 | 800 | 25. | 3 | 4 | 890 |
| 11. | 3 | 7 | 960 | 26. | 3 | 5 | 1020 |
| 12. | 3 | 8 | 510 | 27. | 2 | 7 | 1110 |
| 13. | 3 | 8 | 680 | 28. | 3 | 9 | 980 |
| 14. | 1 | 7 | 660 | 29. | 4 | 9 | 780 |
| 15. | 2 | 8 | 720 | 30. | 3 | 4 | 840 |

Задача 6.

На СТО з безперервним виробничим процесом обслуговування проводяться технічні обслуговування (ТО-1, ТО-2) автомобілів одностипних марок. Виробнича програма станції ТО складає a авт./тиждень. Кількість автомобілів, що проходять обслуговування



нерівномірно розподілена за днями тижня. Тривалість робочої зміни складає 8 годин.

Годинна тарифна ставка оплати праці робітників становить b грн/год. Причому, кожен робітник має c вихідних днів підряд протягом робочого тижня.

Скласти графік виходу на роботу робітників підприємства, при якому витрати на оплату праці будуть мінімальними, при умові повного виконання виробничої програми ТО.

Початкові дані згідно варіанту подано в додатку 1.

Вказівки до розв'язання практичного завдання 3

Задача про оптимальний розкрій матеріалів

Сутність задачі про оптимальний розкрій полягає в розробці таких технологічно допустимих планів розкрою, при яких виходить необхідний комплект заготовок, а відходи за площею, вагою або вартістю зводяться до мінімуму.

Для заготовок у вигляді стержнів довжиною l кожний є варіант розкрою Z_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$). Необхідно отримати a_j частин T_j довжиною l_j ($j=1, 2, 3, 4$). При кожному варіанті розкрою отримуємо k_{ij} частин T_j . Яким чином слід проводити розкрій, щоб отримати необхідну кількість частин з мінімальної кількості стержнів?

Модель задачі

Вводимо змінну x_i – кількість стержнів, розрізаних згідно варіанту розкрою Z_i . Тоді:

$$k_{1j}x_1 + k_{2j}x_2 + k_{3j}x_3 + k_{4j}x_4 + k_{5j}x_5 + k_{6j}x_6 \geq a_j \text{ для } j=1, 2, 3, 4;$$

$$x_i \geq 0 \text{ для } i=1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Мінімальна кількість стержнів (цільова функція):

$$Q_{\min} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

Примітка: умова $k_{i1}l_1 + k_{i2}l_2 + k_{i3}l_3 + k_{i4}l_4 \leq l$, накладена на коефіцієнти, міститься у визначенні “варіант розкрою” і не належить до умов оптимізації.

Задача про оптимізацію графіка зайнятості працівників

Для забезпечення безперервного випуску продукції на підприємстві, де необхідна кількість працівників a_j ($j=1, 2, \dots, n$) у



визначений день T_j розподілена нерівномірно за днями тижня, запроваджено позмінне виконання робіт із Z_i – можливими на протязі тижня робочими змінами ($i=1, 2, \dots, 7$). Необхідно визначити мінімальну кількість робітників у кожній робочій зміні Z_i , за умови виконання запланованого об'єму робіт у повному обсязі.

Модель задачі

Вводимо змінну x_i – кількість робітників, які працюють у робочій зміні Z_i .

Умовно приймаємо, що зміна Z_i працює ($k_{ij}=1$), а у випадку $k_{ij}=0$ – дана зміна не виходить на роботу. Тоді:

$$k_{1j}x_1 + k_{2j}x_2 + k_{3j}x_3 + k_{4j}x_4 + k_{5j}x_5 + k_{6j}x_6 + k_{7j}x_7 \geq a_j \text{ для } j=1, 2, \dots, n;$$

$$x_i \geq 0 \text{ для } i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Мінімальна кількість працівників (цільова функція):

$$R_{\min} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7.$$

Запитання до перевірки знань:

1. До яких задач відносяться задачі про оптимальний розкрій матеріалів?
2. До яких задач відносяться задачі про оптимізацію графіка зайнятості працівників?
3. Що є критерієм ефективності в задачі про оптимальний розкрій матеріалів?
4. Що є критерієм ефективності в задачі про оптимізацію графіка зайнятості працівників?

Практичне заняття 4

Тема: Транспортна задача.

Мета заняття: набути практичних навичок у студентів з розв'язування відкритої та закритої транспортної задачі.

Норма часу (за навчальною програмою): 4 год.

Завдання до виконання практичної роботи

**Задача 7.**

Від заводів-постачальників необхідно перевезти на регіональні склади продукцію. Необхідно скласти такий план перевезень, щоб транспортна робота в тонно-кілометрах була мінімальною, за умови задоволення потреб усіх складів. Місце розташування заводів та складів, кількість випущеної продукції та потреби складів наведені в табл. 4.1. Відстані між містами України наведено в додатку 2.

Таблиця 4.1

Початкові дані до розрахунку задачі 7

| № вар. | Місце розташування заводів | Випуск продукції, т | Місце розташування регіональних складів | Потреби складів, т |
|--------|----------------------------|---------------------|---|--------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1. | Вінниця | 280 | Дніпро | 340 |
| | Полтава | 300 | Луцьк | 270 |
| | Рівне | 290 | Київ | 260 |
| 2. | Полтава | 520 | Чернігів | 240 |
| | Тернопіль | 270 | Одеса | 220 |
| | Херсон | 450 | Миколаїв | 760 |
| | Суми | 360 | | |
| 3. | Миколаїв | 290 | Львів | 200 |
| | Ужгород | 190 | Харків | 600 |
| | Черкаси | 210 | Чернівці | 510 |
| | Хмельницький | 300 | | |
| 4. | Дніпро | 260 | Луцьк | 580 |
| | Чернігів | 180 | Ужгород | 320 |
| | Івано-Франківськ | 200 | Вінниця | 120 |
| | Житомир | 450 | | |
| 5. | Донецьк | 520 | Одеса | 750 |
| | Запоріжжя | 350 | Суми | 430 |
| | Житомир | 210 | Тернопіль | 615 |
| | Київ | 400 | | |
| 6. | Львів | 785 | Дніпро | 180 |
| | Ужгород | 980 | Черкаси | 220 |
| | Івано-Франківськ | 450 | Запоріжжя | 1200 |
| | | | Харків | 310 |



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|--|----------------------------|---|-----------------------------------|
| 7. | Житомир Київ Чернігів Суми | 520 350 210 400 | Луцьк Рівне Тернопіль Ужгород | 480 220 120 310 |
| 8. | Луцьк Рівне Тернопіль Ужгород | 890 560 320 500 | Одеса Миколаїв Херсон | 1250 460 700 |
| 9. | Дніпро Чернігів Запоріжжя Харків | 480 220 120 310 | Львів Ужгород Івано- Франківськ Чернівці | 520 350 210 400 |
| 10. | Одеса Миколаїв Херсон | 860 1250 780 | Житомир Київ Чернігів Суми | 560 630 650 920 |
| 11. | Луцьк Ужгород Вінниця | 630 500 450 | Дніпро Черкаси Запоріжжя Харків | 320 130 350 400 |
| 12. | Кропивницький Луганськ Дніпро Полтава | 960 850 1450 1200 | Хмельницький Вінниця Рівне Луцьк Івано- Франківськ | 320 480 1040 1890 220 |
| 13. | Дніпро Донецьк Запоріжжя | 600 590 1450 | Житомир Київ Чернігів Суми | 560 630 650 920 |
| 14. | Кропивницький Луганськ Дніпро Полтава | 450 120 300 190 | Луцьк Ужгород Вінниця | 520 350 210 |



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|------------------------------------|---|---------------------------------|
| 15. | Житомир Київ Чернігів Суми | 270 180 300 250 | Одеса Херсон Тернопіль Миколаїв | 260 280 300 240 |
| 16. | Житомир Київ Чернігів Суми | 450 300 400 520 | Кропивницький Луганськ Дніпро Полтава | 240 300 295 845 |
| 17. | Дніпро Донецьк Запоріжжя | 300 200 270 | Хмельницький Вінниця Рівне Луцьк | 280 310 250 200 |
| 18. | Львів Івано- Франківськ Ужгород Чернівці | 1450 380 620 890 | Кропивницький Донецьк Харків Луганськ Запоріжжя | 560 450 300 980 780 |
| 19. | Суми Чернігів Черкаси | 290 260 350 | Київ Одеса Миколаїв Херсон | 280 220 340 200 |
| 20. | Луцьк Ужгород Вінниця | 230 210 160 | Одеса Херсон Тернопіль Миколаїв | 160 190 200 270 |
| 21. | Кропивницький Донецьк Харків Луганськ Запоріжжя | 740 560 1230 1480 2100 | Хмельницький Вінниця Рівне Луцьк | 3000 420 1800 350 |
| 22. | Херсон Одеса Миколаїв | 340 250 300 | Суми Чернігів Черкаси Вінниця | 250 300 310 260 |



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|--|----------------------------|---|-----------------------------------|
| 23. | Суми Чернігів Черкаси | 580 300 200 | Луцьк Ужгород Вінниця Хмельницький | 350 280 310 260 |
| 24. | Дніпро Донецьк Запоріжжя | 320 220 250 | Львів Івано- Франківськ Ужгород Чернівці | 300 300 240 280 |
| 25. | Львів Луцьк Рівне Житомир | 880 770 550 660 | Донецьк Луганськ Харків Чернігів Запоріжжя | 330 440 990 110 220 |
| 26. | Суми Чернігів Черкаси Вінниця | 350 650 500 480 | Кропивницький Луганськ Дніпро Полтава | 300 820 220 180 |
| 27. | Дніпро Донецьк Запоріжжя | 320 220 250 | Суми Чернігів Черкаси Вінниця | 300 300 240 280 |
| 28. | Луцьк Ужгород Вінниця | 230 210 160 | Київ Одеса Миколаїв Херсон | 160 190 200 270 |
| 29. | Кропивницький Луганськ Дніпро Полтава | 960 850 1450 1200 | Хмельницький Вінниця Рівне Луцьк Івано- Франківськ | 320 480 1040 1890 220 |
| 30. | Дніпро Донецьк Запоріжжя | 600 590 1450 | Житомир Київ Чернігів Суми | 560 630 650 920 |



Вказівки до розв'язання практичного завдання 4

Транспортна задача полягає у знаходженні такого плану перевезень продукції від m виробників до n споживачів, при якому витрати будуть мінімальні. Якщо споживач j отримує одиницю продукції (по прямій дорозі) від виробника i , то виникають витрати p_{ij} . При цьому робимо припущення, що транспортні витрати пропорційні кількості продукції, яка перевозиться, тобто на перевезення k одиниць продукції витрати складають $k \cdot p_{ij}$.

Припустимо, що

$$\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{j=1}^n a_j,$$

де b_i – кількість продукції у i -го виробника;

a_j – потреби j -го споживача.

Позначивши через x_{ij} кількість продукції, що перевозиться від i -го виробника до j -го споживача, отримаємо математичну модель задачі лінійного програмування, яку необхідно вирішити відносно цільової функції K_{\min} :

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j \quad \text{для } j=1, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i \quad \text{для } i=1, \dots, m;$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{для } i=1, \dots, m \text{ та } j=1, \dots, n;$$

$$K_{\min} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot x_{ij}.$$

Примітка: якщо $\sum_{i=1}^m b_i > \sum_{j=1}^n a_j$, то кількість продукції $\sum_{i=1}^m b_i - \sum_{j=1}^n a_j$

залишиться на складах. В такому випадку необхідно вводити “фіктивного” споживача $n+1$ з потребами $\sum_{i=1}^m b_i - \sum_{j=1}^n a_j$, а транспортні витрати $p_{i,n+1}$ приймаємо рівними нулю для всіх i . Якщо $\sum_{i=1}^m b_i < \sum_{j=1}^n a_j$, то потреби споживачів не можуть бути



задоволені, тому початкові умови необхідно змінити таким чином, щоб задовольнити потреби споживачів.

Транспортну задачу характеризують транспортною таблицею та таблицею витрат:

| | a_1 | . | . | . | a_n |
|-------|-------|---|---|---|-------|
| b_1 | . | | | | |
| . | | . | | | |
| . | | | . | | |
| . | | | | . | |
| b_m | | | | | . |

| | | | | |
|----------|---|---|---|----------|
| p_{11} | . | . | . | p_{1n} |
| . | | | | . |
| . | | | | . |
| . | | | | . |
| p_{m1} | . | . | . | p_{mn} |

Допустимий план перевезень необхідно представити у вигляді транспортної таблиці:



| | a_1 | . | . | . | a_n |
|-------|----------|---|---|---|----------|
| b_1 | x_{11} | . | . | . | x_{1n} |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| b_m | x_{m1} | . | . | . | x_{mn} |

Сума елементів рядка i повинна бути рівна b_i , а сума елементів стовпця j повинна бути рівна a_j , і всі x_{ij} повинні бути додатними.

Таким чином, отримаємо модель транспортної задачі:

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = b_1;$$

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = a_1;$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = b_2;$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = a_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = b_m.$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = a_n.$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ для } i=1, \dots, m \text{ та } j=1, \dots, n.$$

Мінімальна транспортна робота (цільова функція):

$$K_{\min} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij}.$$



Запитання до перевірки знань:

1. Дайте визначення поняття «транспортна задача».
2. Назвіть методи побудови початкового опорного плану транспортної задачі.
3. Який з методів знаходження початкового плану доставки продукції транспортної задачі є найбільш ефективним?
4. Яка необхідна та достатня умова розв'язуваності транспортної задачі?
5. Розкрийте алгоритм методу потенціалів.
6. Що означає умова збалансованості транспортної задачі?

Практичне заняття 5

Тема: Розподільча задача лінійного програмування.

Мета заняття: набути практичних навичок у студентів з розв'язання задачі про організацію випуску різномірної продукції та математичного запису загальної розподільчої задачі.

Норма часу (за навчальною програмою): 4 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 8.

На підприємстві експлуатуються три типи транспортних засобів, що можуть перевозити чотири види вантажів. Необхідно розподілити перевезення вантажів по транспортних засобах з метою мінімізації загальної собівартості процесу транспортування вантажів, якщо відомі наступні дані про виробничий процес транспортування:

- продуктивності транспортних засобів по кожному з видів вантажу, т/год.:

$$|\lambda_{ij}| = \begin{vmatrix} 24+n & 10+(m+n) & 18+m & 42+(m+2) \\ 12+m & 5+(2n+1) & 9+n & 19+(n+4) \\ 8+n & 10+(m+3) & 6+m & 14+(2m+2) \end{vmatrix}$$

- собівартість транспортування вантажу, грн./т



$$|c_{ij}| = \begin{vmatrix} 2 \cdot n & 1 \cdot m & 3 \cdot n & 1 \cdot n \\ 3 \cdot m & 2 \cdot n & 4 \cdot m & 1 \cdot m \\ 6 \cdot n & 3 \cdot m & 5 \cdot n & 2 \cdot m \end{vmatrix}$$

- фонди робочого часу транспортних засобів (a_i): $90 \cdot (m+n)$, $220 \cdot m$, $180 \cdot n$ год.;
- планований обсяг перевезення вантажів (b_j): $1200 \cdot m$, $900 \cdot n$, $1800 \cdot m$, $840 \cdot (m+n)$ тонн.

Примітка: m і n – відповідно передостання та остання цифри залікової книжки студента.

Вказівки до розв'язання практичного завдання 5

Розподільча задача – це розділ дослідження операцій, який вивчає оптимальний розподіл ресурсів за операціями, які необхідно виконувати з найбільшою сумарною ефективністю. Розглянемо дану задачу на прикладі.

Приклад розподільчої задачі.

На підприємстві експлуатуються три типи транспортних засобів, що можуть перевозити чотири види вантажів. Відомі наступні дані про виробничий процес транспортування вантажів:

- продуктивності транспортних засобів по кожному з видів вантажу, т/год.

$$|\lambda_{ij}| = \begin{vmatrix} 24 & 30 & 18 & 42 \\ 12 & 15 & 9 & 21 \\ 8 & 10 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

- собівартість транспортування вантажу, грн./т

$$|c_{ij}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$



- фонди робочого часу транспортних засобів (a_i): 90, 220, 180 год.;

- планований обсяг перевезення вантажів (b_j): 1200, 900, 1800, 840 тонн.

Потрібно розподілити перевезення вантажів за транспортними засобами з метою мінімізації загальної собівартості процесу транспортування вантажів.

Розв'язання.

Нехай змінні x_{ij} – це час, протягом якого i -й транспортний засіб буде перевозити j -ий вантаж. Зведемо початкові дані задачі в розподільчу таблицю (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Розподільча матриця задачі

| Транспортні засоби | Вантажі | | | | Фонд часу a_i , год. |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|------------------------|
| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | |
| A_1 | 2 24 | 1 30 | 3 18 | 1 42 | 90 |
| A_2 | 3 12 | 2 15 | 4 9 | 1 21 | 220 |
| A_3 | 6 8 | 3 10 | 5 6 | 2 14 | 180 |
| Обсяг перевезень b_j , т | 1200 | 900 | 1800 | 840 | |

Цільова функція має зміст собівартості перевезення запланованої кількості вантажів усіх видів:

$$\begin{aligned}
 L(X) = & 2 \cdot 24 \cdot x_{11} + 1 \cdot 30 \cdot x_{12} + 3 \cdot 18 \cdot x_{13} + 1 \cdot 42 \cdot x_{14} + \\
 & + 3 \cdot 12 \cdot x_{21} + 2 \cdot 15 \cdot x_{22} + 4 \cdot 9 \cdot x_{23} + 1 \cdot 21 \cdot x_{24} + \\
 & + 6 \cdot 8 \cdot x_{31} + 3 \cdot 10 \cdot x_{32} + 5 \cdot 6 \cdot x_{33} + 2 \cdot 14 \cdot x_{34} \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

Обмеження мають вигляд:

- по фондах часу, год.:

- по обсягах перевезень, т:



$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180, \\ x_{ij} \geq 0 \quad (\forall i = \overline{1,3}; \quad \forall j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200, \\ 30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900, \\ 18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800, \\ 42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840, \\ x_{ij} \geq 0 \quad (\forall i = \overline{1,3}; \quad \forall j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Перетворимо РЗ у ТЗ, тобто представимо вихідну задачу у вигляді, коли вантажі транспортує тільки один транспортний засіб – базовий і всі параметри задачі погодимо з його характеристиками. У якості базового можна вибирати будь-який з транспортних засобів. Виберемо ТЗ з максимальною продуктивністю, тобто A_1 . Визначимо продуктивності решти ТЗ α_i , нормовані щодо продуктивності базового:

$$\alpha_1 = \frac{24}{24} = \frac{30}{30} = \frac{18}{18} = \frac{42}{42} = 1;$$

$$\alpha_2 = \frac{12}{24} = \frac{15}{30} = \frac{9}{18} = \frac{21}{42} = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_3 = \frac{8}{24} = \frac{10}{30} = \frac{6}{18} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, базовий транспортний засіб працює в два рази швидше другого й у три рази швидше третього.

Перерахуємо фонди часу [в годинах] ТЗ:

$$a'_1 = 90 \cdot 1 = 90; \quad a'_2 = 220 \cdot \frac{1}{2} = 110; \quad a'_3 = 180 \cdot \frac{1}{3} = 60 \text{ [год]}.$$

З цих величин випливає, що той обсяг робіт, що другий ТЗ виконує за свій фонд часу 220 год. базовий ТЗ зможе виконати за 110 год. Аналогічно обсяг робіт, що третій ТЗ виконує за 180 год. базовий виконає за 60 годин.

Перерахуємо планове завдання:



$$b'_1 = \frac{1200}{24} = 50;$$

$$b'_2 = \frac{900}{30} = 30;$$

$$b'_3 = \frac{1800}{18} = 100.$$

Звідси випливає, що план перевезень першого виду вантажу базовий ТЗ виконає за 50 годин, другого виду – за 30 годин, і т.д.

Проводимо перерахунок собівартостей [грн./год.]:

$$c'_{13} = 3 \cdot 18 = 54; \quad c'_{21} = 3 \cdot 24 = 72; \quad c'_{34} = 2 \cdot 42 = 84, \text{ і т.д.}$$

В отриманій ТЗ умова балансу не виконується, оскільки сумарний фонд часу роботи транспортних засобів більше, ніж це необхідно для виконання плану перевезень всіх видів вантажу (260 год. > 200 год.). Введемо фіктивний стовпець B_ϕ і запишемо всі перераховані параметри РЗ у транспортну матрицю (див. табл. 5.2). Фіктивні тарифи для спрощення прирівнюємо до нуля.

Таблиця 5.2
Транспортна матриця задачі

| Транспортні засоби | Вантажі | | | | | Фонд часу a'_i , год |
|----------------------------------|---------|-------|-------|-------|----------|---------------------------|
| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | B_ϕ | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A_1 | 48 | 30 | 54 | 42 | 0 | 90 |
| A_2 | 72 | 60 | 72 | 42 | 0 | 110 |
| A_3 | 144 | 90 | 90 | 84 | 0 | 60 |
| Обсяг перевезень b'_j , год | 50 | 30 | 100 | 20 | 60 | |

Для спрощення замість оптимального рішення розглянемо опорний план $X'_{ПЗК}$, знайдений методом північно-західного кута.



$$X'_{ПЗК} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60^{\phi} \end{pmatrix}, [\text{год.}].$$

Перетворимо опорний план ТЗ $X'_{ПЗК}$ в опорний план РЗ $X_{ПЗК}$:

$$X_{ПЗК} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180^{\phi} \end{pmatrix}, [\text{год.}].$$

Таким чином, перший транспортний засіб повинен бути задіяний 50 годин на перевезенні вантажів першого виду, 30 год. – на перевезенні вантажів другого виду і 10 год. – третього виду. Другий ТЗ повинен 180 год. перевозити вантаж третього виду і 40 год. – вантаж четвертого виду. А транспортний засіб буде простоювати, тому що відповідно до рішення, його завантаження знаходиться у фіктивному стовпці ($x_{35} = 180^{\phi}$).

Визначимо, скільки тонн вантажу кожного виду повинні перевезти транспортні засоби:

$$X^k_{ПЗК} = \begin{pmatrix} 1200 & 900 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1620 & 840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}, [\text{т}].$$

Визначимо загальну собівартість перевезень, використовуючи обчислені значення елементів матриці $X^k_{ПЗК}$:

$$L(X) = 2 \cdot 1200 + 1 \cdot 900 + 3 \cdot 180 + 4 \cdot 1620 + 1 \cdot 840 = 16020 \text{ грн.}$$

Запитання до перевірки знань:

1. Дайте визначення розподільчої задачі.
2. Який зміст має цільова функція розподільчої задачі?
3. До якого вигляду необхідно привести транспортну задачу перед її розв'язуванням?



Практичне заняття 6

Тема: Задачі управління запасами.

Мета заняття: набуті практичних навичок у студентів із визначення оптимального розміру партії замовлення товарів за моделлю Вільсона та розв'язання задачі планування економічного розміру партії замовлення у випадку власного виробництва.

Норма часу (за навчальною програмою): 4 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 9.

Обсяг продажу деякого магазину складає в рік $500 \cdot m$ упаковок деякої продукції в пакетах. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна покупки одного пакета дорівнює $2+n$ грн. За доставку замовлення власник магазину повинен заплатити $10 \cdot m$ грн. Час доставки замовлення від постачальника складає 12 робочих днів (при 6-ти денному робочому тижні). По оцінках фахівців, витрати збереження в рік складають $40+m+n$ коп. за один пакет.

Необхідно визначити:

- скільки пакетів повинен замовляти власник магазину для однієї поставки;
- частоту замовлень;
- точку замовлення. Відомо, що магазин працює 300 днів на рік.

Примітка: m і n – відповідно передостання та остання цифри залікової книжки студента.

Задача 10.

На деякому верстаті виготовляються деталі в кількості $2000 \cdot (m+n)$ штук на місяць. Ці деталі використовуються для виробництва продукції на іншому верстаті з інтенсивністю $500 \cdot m$ шт. на місяць. По оцінках фахівців компанії, витрати на збереження складають $50+n$ коп. на рік за одну деталь. Вартість виробництва однієї деталі дорівнює 2,50 грн., а вартість на підготовку виробництва складає $1000 \cdot (m+n)$ грн. Яким повинен бути розмір партії деталей, виготовленої на першому верстаті, з якою частотою варто запускати виробництво цих партій?



Примітка: m і n – відповідно передостання та остання цифри залікової книжки студента.

Вказівки до розв'язання практичного завдання 6

Задача управління запасами виникає, коли необхідно створити запас матеріальних ресурсів або предметів споживання з метою задоволення попиту на певному заданому інтервалі часу. Основною метою управління запасами є розробка методики організації поставок, за якої загальні витрати на доставку, зберігання та забезпечення безперебійного функціонування споживачів будуть мінімальні.

Модель Вільсона є найпростішою моделлю управління запасами і описує ситуацію закупівлі продукції в зовнішнього постачальника.

Розглянемо декілька прикладів задач управління запасами.

Приклад 1. Визначення оптимального розміру замовлення.

Обсяг продажу деякого магазину складає в рік 500 упаковок деякої продукції в пакетах. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна покупки одного пакета дорівнює 2 грн. За доставку замовлення власник магазину повинен заплатити 10 грн. Час доставки замовлення від постачальника складає 12 робочих днів (при 6-ти денному робочому тижні). За оцінками фахівців, витрати на збереження в рік складають 40 коп. за один пакет.

Необхідно визначити:

- скільки пакетів повинен замовляти власник магазину для однієї поставки;

- частоту замовлень;

- точку замовлення.

Відомо, що магазин працює 300 днів на рік.

Розв'язання.

Прийmemo за одиницю часу рік, тоді

- $v = 500$ шт. пакетів у рік;

- $K = 10$ грн.,

- $s = 0,4$ грн./шт.·рік.

Оскільки пакети з продукцією замовляються зі складу постачальника, а не виробляються самостійно, то будемо використовувати модель Вільсона.



$$Q_w = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0,4}} = 158,11 \approx 158 \text{ штук.}$$

Оскільки число пакетів повинно бути цілим, то будемо замовляти по 158 штук. При розрахунку інших параметрів задачі будемо використовувати не $Q^* = 158,11$, а $Q = 158$.

Річні витрати на управління запасами рівні:

$$L = K \frac{v}{Q} + s \frac{Q}{2} = 10 \frac{500}{158} + 0,4 \frac{158}{2} = 63,25 \text{ грн./рік}$$

Подача кожного нового замовлення повинна проводитись через:

$$\tau = \frac{Q}{v} = \frac{158}{500} = 0,316 \text{ року.}$$

Оскільки відомо, що в даному випадку рік дорівнює 300 робочим дням, то $\tau = 0,316 \cdot 300 = 94,8 \approx 95$ робочих днів.

Замовлення варто подавати при рівні запасу:

$$h_0 = vT_d = \frac{500}{300} 12 = 20 \text{ пакетів.}$$

Тобто, ці 20 пакетів будуть продані протягом 12 днів, за час, протягом якого буде доставлятися замовлення.

Приклад 2. Планування економічного розміру партії товару.

На деякому верстаті виготовляються деталі в кількості 2000 штук на місяць. Ці деталі використовуються для виробництва продукції на іншому верстаті з інтенсивністю 500 шт. на місяць. За оцінками фахівців компанії, витрати на збереження складають 50 коп. на рік за одну деталь. Вартість виробництва однієї деталі дорівнює 2,50 грн., а вартість на підготовку виробництва складає 1000 грн. Яким повинен бути розмір партії деталей, виготовленої



на першому верстаті, з якою частотою варто запускати виробництво цих партій?

Розв'язання.

$K = 1000$ грн., $\lambda = 2000$ шт. на місяць або 24000 шт. на рік, $v = 500$ шт. на місяць або 6000 шт. у рік, $s = 0,50$ грн. на рік за деталь. У даній ситуації необхідно використовувати модель планування економічного розміру партії.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kv\lambda}{s(\lambda - v)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 6000 \cdot 24000}{0,50 \cdot (24000 - 6000)}} = 5656,9 \approx 5657 \text{ шт.}$$

Частота запуску деталей у виробництво дорівнює

$$\tau = \frac{Q}{v} = \frac{5657}{6000} = 0,94 \text{ року або } 11,28 \text{ місяців.}$$

Загальні витрати на управління запасами складають:

$$L = K \frac{v}{Q} + s \frac{Q(\lambda - v)}{2\lambda} = \frac{1000 \cdot 6000}{5657} + \frac{0,50 \cdot 5657 \cdot 18000}{2 \cdot 24000} = 2121,32 \text{ грн./рік.}$$

Запитання до перевірки знань:

1. Що є точкою замовлення в задачах управління запасами?
2. Що є періодом постачання в задачах управління запасами?
3. Яка модель управління запасами описує ситуацію закупівлі товару у зовнішнього постачальника при відсутності дефіциту?
4. Як називається модель, яка визначає оптимальний обсяг замовлення товару, що дозволяє мінімізувати загальні змінні витрати, пов'язані із замовленням і зберіганням запасів?
5. Якими припущеннями характеризується Модель Уілсона (Вільсона)?

Практичне заняття 7

Тема: Задачі управління запасами з урахуванням знижок.

Мета заняття: набути практичних навичок у студентів з визначення оптимального розміру партії замовлення товарів при



наданні знижок та прийняття рішення про використання знижок при закупівлі партії товарів.

Норма часу (за навчальною програмою): 4 год.

Завдання до виконання практичної роботи

Задача 11.

Витрати на замовлення рівні $20 \cdot m$ грн., витрати на збереження продукції n грн. за добу, інтенсивність споживання товару $50 \cdot (m+n)$ шт. на день, ціна товару – (2 грн.+10· m коп.) за одиницю, а при обсязі замовлення $15 \cdot (m+n)$ шт. і більше – 2 грн. – 5· n коп.

Визначити оптимальний розмір замовлення, ціну покупки і витрати на управління запасами.

Вказівки до розв'язання практичного завдання 7

Рівняння загальних витрат для ситуації, коли враховуються витрати на закупівлю товару, має вигляд:

$$L = K \frac{v}{Q} + s \frac{Q}{2} + cv \text{ [грн./од. часу]}, \quad (7.1)$$

де c – ціна товару [грн./од.тов.];

cv – витрати на закупівлю товару в одиницю часу [грн./од.часу]. Якщо ціна закупівлі складованого товару постійна і не залежить від Q , то її включення в рівняння загальних витрат приводить до переміщення графіка цього рівняння паралельно осі Q і не змінює його форми (див. рис. 7.1).

Тобто, у випадку постійної ціни товару її облік не змінює оптимального рішення Q_w .

Якщо на замовлення великого обсягу надаються знижки, то замовлення на більш великі партії спричиняють за собою збільшення витрат на збереження, але це збільшення може бути компенсовано зниженням закупівельної ціни. Таким чином, оптимальний розмір замовлення може змінюватися в порівнянні із ситуацією відсутності знижок. Тому витрати на придбання товару необхідно враховувати в моделі закупівлі зі знижками.



Вхідні параметри моделі, що враховує знижки

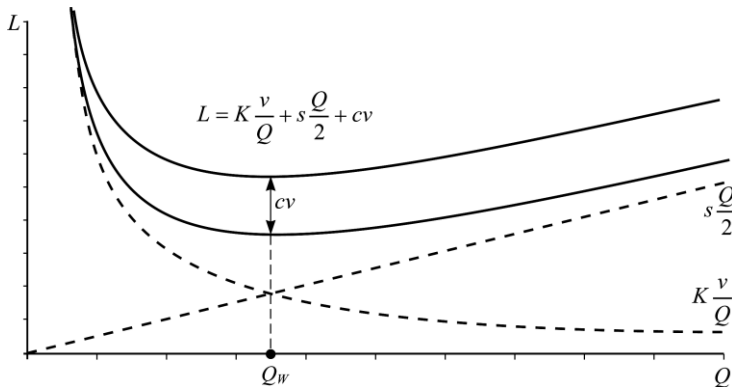


Рис.7.1. Графік витрат на управління запасами з урахуванням витрат на покупку

- 1) Q_{p1} , Q_{p2} – точки розриву цін, тобто розміри покупок, при яких починають діяти відповідно перша і друга знижки, [од. тов.];
- 2) c , c_1 , c_2 – відповідно вихідна ціна, ціна з першою знижкою, ціна з другою знижкою, [грн./од. тов.].

Вплив однієї знижки на загальні витрати на управління запасами показаний на рис. 7.2.

Правило вибору Q^* для випадку з однією знижкою має вигляд:

$$Q^* = \begin{cases} Q_w, & \text{якщо } 0 \leq Q_{p1} < Q_w \quad (\text{область I}), \\ Q_{p1}, & \text{якщо } Q_w \leq Q_{p1} < Q_1 \quad (\text{область II}), \\ Q_w, & \text{якщо } Q_{p1} \geq Q_1 \quad (\text{область III}). \end{cases} \quad (7.2)$$

Правильність рішення задач УЗ зі знижками у значній мірі визначається якісно побудованим графіком загальних витрат із вказанням на графіку всіх параметрів, використовуваних при рішенні. Тому в першу чергу необхідно аналізувати ситуацію графічно і тільки після цього проводити чисельні обчислення. Наприклад, якщо уважно проаналізувати ситуації на рис. 7.2, то можна приймати рішення без безпосереднього використання правила (7.2). Наочно легко визначити більш „вигідний” обсяг



замовлення, знайшовши точку, координата якої по осі L лежить нижче інших варіантів замовлень.

При вирішенні задач із двома знижками спочатку знаходиться оптимальний обсяг замовлення з врахуванням першої знижки, а потім розглядається друга знижка, тобто обидві підзадачі вирішуються за правилом (7.2). Розглянемо приклад задачі управління запасами з врахуванням однієї знижки.

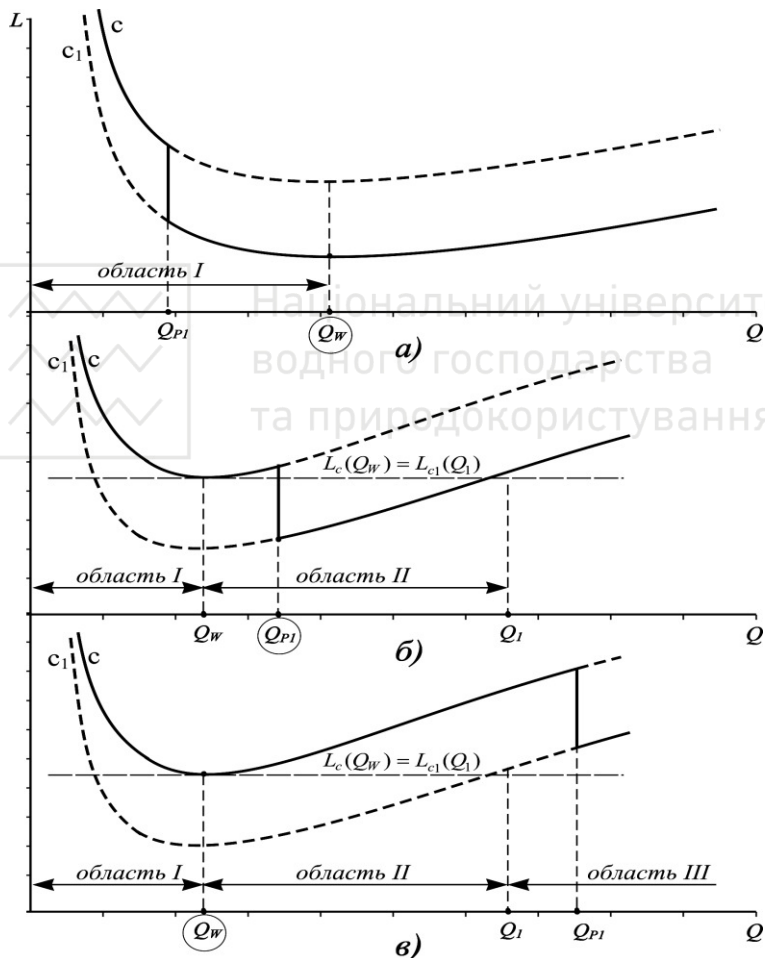


Рис. 7.2. Графік витрат з урахуванням знижок:

а) $Q^* = Q_W$; б) $Q^* = Q_{p1}$; в) $Q^* = Q_W$



Приклад. Визначення оптимального розміру замовлення з наданням однієї знижки.

Нехай витрати на замовлення рівні 10 грн., витрати на збереження продукції 1 грн. за добу, інтенсивність споживання товару 5 шт. на день, ціна товару – 2 грн. за штуку, а при обсязі замовлення 15 шт. і більше – 1 грн.

Визначити оптимальний розмір замовлення, ціну покупки і витрати на управління запасами.

Розв'язання.

Починаємо рішення з приблизної побудови пунктирними лініями графіків двох функцій загальних витрат, що відповідають двом цінам, що вказуємо над відповідними лініями витрат: $c = 2$ грн./шт. та $c_1 = 1$ грн./шт. (рис. 7.3).

Оскільки обсяг замовлення, що задається формулою Вільсона, легко визначається наочно як точка мінімуму обох функцій, то без попередніх обчислень графічно знаходимо обсяг Вільсона Q_W і відзначаємо його на графіку.

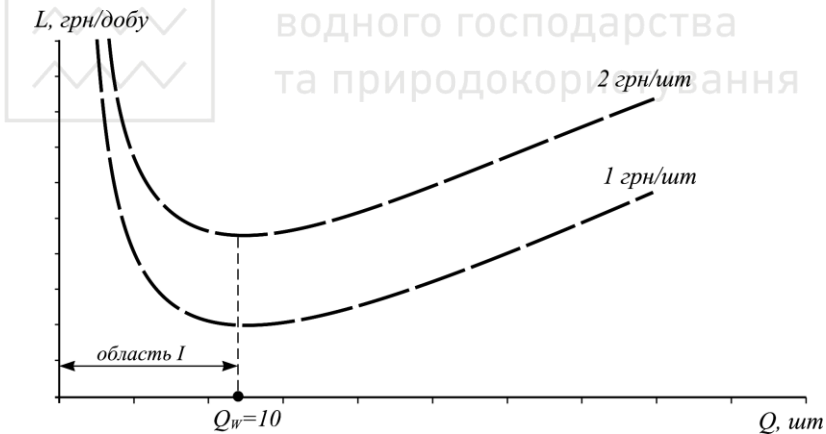


Рис. 7.3. Загальні витрати на управління запасами

Тільки після цього, використовуючи параметри $K=10$ грн., $v=5$ шт./день, $s=1$ грн. за 1 шт. на добу, обчислюємо значення Q_W і підписуємо його на графіку під позначенням Q_W .



$$Q_W = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{1}} = 10 \text{ [штук]}.$$

Очевидно, що в область I $Q_{p1} = 15$ шт. не попадає, тому що $Q_{p1} > Q_W$. Таким чином, Q_{p1} може потрапити в області II або III. Границею між цими областями служить розмір замовлення Q_1 , що зрівнює загальні витрати при ціні зі знижкою 1 грн./шт. і витрати при замовленні Q_W за вихідною ціною 2 грн./шт. Спочатку будемо Q_1 графічно (рис. 7.4).

Тільки після цього знайдемо Q_1 чисельно. Використовуючи рис. 7.4, запишемо вираз, що показує рівність витрат:

$$L_c(Q_W) = L_{c1}(Q_1),$$

з числовими значеннями параметрів:

$$L_{2 \text{ грн/шт}}(10) = L_{1 \text{ грн/шт}}(Q_1).$$

Після розкриття лівої і правої частин отримаємо:

$$L_{2 \text{ грн}}(Q) = K \frac{v}{Q} + s \frac{Q}{2} + cv = 10 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{10}{2} + 2 \cdot 5 = 20 \text{ [грн./добу.]},$$

$$L_{1 \text{ грн}}(Q_1) = K \frac{v}{Q_1} + s \frac{Q_1}{2} + c_1 v = 10 \cdot \frac{5}{Q_1} + 1 \cdot \frac{Q_1}{2} + 1 \cdot 5 = \frac{50}{Q_1} + \frac{Q_1}{2} + 5,$$

$$\frac{50}{Q_1} + \frac{Q_1}{2} + 5 = 20, \quad Q_1^2 - 30Q_1 + 100 = 0, \quad Q_1 = 26,18 \text{ шт. або } Q_1 = 3,82 \text{ шт.}$$

Завжди вибираємо більший з коренів $Q_1 = 26,18$, тому що менший за значенням корінь не дає нам інформації про границю областей II і III (див. рис. 7.4), і відзначаємо чисельне значення 26,18 на графіку.

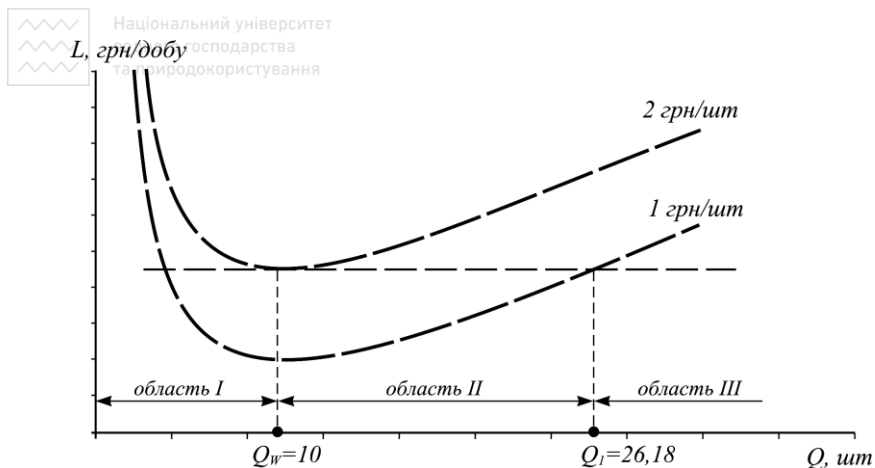


Рис. 7.4. Побудова Q_1 на графіку загальних витрат управління запасами

Таким чином, точка розриву цін $Q_{p1} = 15$ попадає в область II, так як: $10 \leq 15 \leq 26,18$ ($Q \leq Q_{p1} \leq Q_1$).

Відзначимо цю точку на графіку в будь-якому місці області II (рис. 7.5).

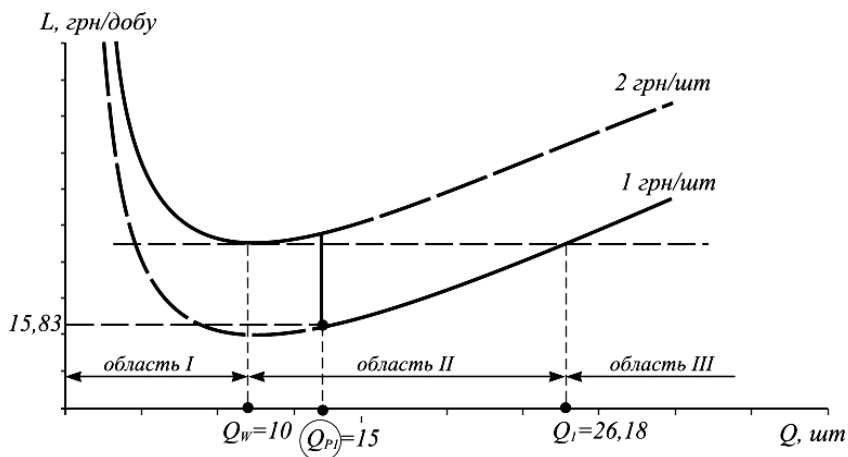


Рис. 7.5. Оптимальне рішення до прикладу



Після цього суцільною лінією обведемо ті ділянки обох функцій витрат, що відповідають діючим цінам, тобто до обсягу $Q_{p1} = 15$ обведемо верхню лінію витрат, а після – нижню.

Відповідно до правила (7.2) і графіка (див. рис. 7.5) оптимальним є обсяг замовлення $Q^* = 15$ шт. за ціною 1 грн./шт. Таким чином, у даній ситуації знижкою користуватися вигідно. Загальні витрати при цьому складають:

$$L_1(15) = 10 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{15}{2} + 1 \cdot 5 = 15,83 \text{ [грн./добу]}.$$

Якби замовляли по 10 шт. товару, то загальні витрати склали б 20 грн., тобто при замовленні в 15 шт. економія засобів складає 4,17 грн./добу.



Запитання до перевірки знань:

1. Дайте визначення точки розриву цін при врахуванні знижок в моделях управління запасами.
2. Чим визначається правильність рішення задач управління запасами зі знижками?
3. Який вигляд має правило вибору Q^* для випадку з однією знижкою?
4. Що таке витрати на зберігання запасу?



3. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бредюк В. І. Дослідження операцій. Приклади і задачі : навч. посібн. Рівне : НУВГП, 2009. 270 с.
2. Бредюк В. І. Дослідження операцій. Теоретичні засади : навч. посібн. Рівне : НУВГП, 2009. 268 с.
3. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник 2-ге вид., випр. та доп., за наук. ред. В.В. Пасічника. Львів : Магнолія, 2007. 480 с.
4. Охріменко М.Г., Дзюбан І. Ю. Дослідження операцій : навч. посібн. Київ : ЦНЛ, 2006. 184 с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология : Учебное пособие для вузов. Москва : Дрофа, 2004. 208 с.
6. Таха Х. А. Введение в исследование операций : пер. с англ. Минько А.А. 7-е изд. Москва : Вильямс, 2005. 912 с.
7. Ашманов С. А., Тимохов А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях : Учебное пособие для вузов. Москва : Наука, 1991, 448 с.

Початкові дані до розрахунку задачі 6

| № вар. | Марка автомобіля | Вид обслу- гову- вання | Виробн. прог- рама, <i>a</i> авт./ тижд. | Тар. став- ка, <i>b</i> грн./ год. | <i>c</i> | Розподіл надходження автомобілів на обслуговування за днями тижня, % | | | | | | |
|-----------|---------------------|---------------------------------|--|--|----------|---|----|----|----|----|----|----|
| | | | | | | Пн | Вт | Ср | Чт | Пт | Сб | Нд |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1. | Volkswagen LT 46 | ТО-1 | 805 | 0,89 | 2 | 15 | 25 | 10 | 10 | 25 | 10 | 5 |
| 2. | Mercedes-Benz 814D | ТО-2 | 425 | 0,98 | 2 | 12 | 18 | 17 | 13 | 20 | 10 | 10 |
| 3. | Volvo FH 12 | ТО-2 | 115 | 1,05 | 3 | 14 | 16 | 25 | 20 | 15 | 6 | 4 |
| 4. | Renault Premium 250 | ТО-2 | 129 | 1,05 | 3 | 15 | 10 | 15 | 20 | 10 | 20 | 10 |
| 5. | Mercedes-Benz Axor | ТО-2 | 528 | 0,98 | 2 | 13 | 25 | 17 | 10 | 10 | 15 | 10 |
| 6. | Scania 124 P420 | ТО-1 | 904 | 0,89 | 2 | 11 | 22 | 17 | 14 | 16 | 15 | 5 |
| 7. | MAN 19314 | ТО-1 | 823 | 0,89 | 2 | 15 | 25 | 10 | 10 | 25 | 10 | 5 |
| 8. | Mercedes-Benz 1840 | ТО-2 | 535 | 0,98 | 3 | 12 | 18 | 17 | 13 | 20 | 10 | 10 |
| 9. | Mercedes-Benz 1841 | ТО-2 | 195 | 1,05 | 3 | 14 | 16 | 25 | 20 | 15 | 6 | 4 |
| 10. | Scania 114G | ТО-2 | 206 | 1,05 | 2 | 15 | 10 | 15 | 20 | 10 | 20 | 10 |
| 11. | Renault Premium 440 | ТО-2 | 536 | 0,98 | 2 | 13 | 25 | 17 | 10 | 10 | 15 | 10 |

4. ДОДАТКИ

Додаток 1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-----|------------------------------|------|------|------|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 12. | Renault Premium 450 | TO-1 | 905 | 0,89 | 3 | 11 | 22 | 17 | 14 | 16 | 15 | 5 |
| 13. | Mercedes-Benz Actros 1848 LS | TO-1 | 786 | 0,89 | 3 | 5 | 17 | 13 | 11 | 29 | 15 | 10 |
| 14. | Scania 114G | TO-2 | 365 | 0,98 | 3 | 15 | 23 | 11 | 29 | 14 | 4 | 4 |
| 15. | Renault AE 430 | TO-2 | 155 | 1,05 | 2 | 15 | 10 | 15 | 20 | 10 | 20 | 10 |
| 16. | Renault AE 440 | TO-2 | 109 | 1,05 | 2 | 13 | 25 | 17 | 10 | 10 | 15 | 10 |
| 17. | Renault AE 480 | TO-2 | 652 | 0,98 | 2 | 11 | 22 | 17 | 14 | 16 | 15 | 5 |
| 18. | Renault Premium 410.19 | TO-1 | 966 | 0,89 | 3 | 5 | 17 | 13 | 11 | 29 | 15 | 10 |
| 19. | Renault 420 TI | TO-1 | 1230 | 0,89 | 3 | 15 | 23 | 11 | 29 | 14 | 4 | 4 |
| 20. | Volkswagen LT 46 | TO-2 | 654 | 0,98 | 2 | 13 | 25 | 17 | 10 | 10 | 15 | 10 |
| 21. | Mercedes-Benz 814D | TO-2 | 102 | 1,05 | 2 | 11 | 22 | 17 | 14 | 16 | 15 | 5 |
| 22. | Volvo FH 12 | TO-2 | 98 | 1,05 | 3 | 15 | 25 | 10 | 10 | 25 | 10 | 5 |
| 23. | Renault Premium 250 | TO-2 | 368 | 0,98 | 3 | 12 | 18 | 17 | 13 | 20 | 10 | 10 |
| 24. | Mercedes-Benz Axor | TO-1 | 864 | 0,89 | 3 | 14 | 16 | 25 | 20 | 15 | 6 | 4 |
| 25. | Scania 124 P420 | TO-1 | 760 | 0,89 | 2 | 15 | 10 | 15 | 20 | 10 | 20 | 10 |
| 26. | Renault Premium 250 | TO-2 | 652 | 0,98 | 2 | 11 | 22 | 17 | 14 | 16 | 15 | 5 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-----|-----------------------|------|-----|------|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 27. | Mercedes-Benz Axor | TO-1 | 966 | 0,89 | 3 | 5 | 17 | 13 | 11 | 29 | 15 | 10 |
| 28. | Scania 124 P420 | TO-1 | 528 | 0,98 | 2 | 13 | 25 | 17 | 10 | 10 | 15 | 10 |
| 29. | MAN 19314 | TO-1 | 904 | 0,89 | 2 | 11 | 22 | 17 | 14 | 16 | 15 | 5 |
| 30. | Mercedes-Benz 1840 | TO-1 | 823 | 0,89 | 2 | 15 | 25 | 10 | 10 | 25 | 10 | 5 |

Відстані між містами України

| Місто | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-------|------------------|------|-----|------|------|------|------|-----|-----|------|------|------|-----|-----|
| 1 | Вінниця | 0 | 645 | 868 | 125 | 748 | 366 | 256 | 316 | 1057 | 382 | 360 | 471 | 428 |
| 2 | Дніпро | 645 | 0 | 252 | 664 | 81 | 901 | 533 | 294 | 394 | 805 | 975 | 343 | 468 |
| 3 | Донецьк | 868 | 252 | 0 | 858 | 217 | 1171 | 727 | 520 | 148 | 1111 | 1221 | 611 | 731 |
| 4 | Житомир | 125 | 664 | 858 | 0 | 738 | 431 | 131 | 407 | 1182 | 257 | 423 | 677 | 557 |
| 5 | Запоріжжя | 748 | 81 | 217 | 738 | 0 | 1119 | 607 | 303 | 365 | 681 | 833 | 377 | 497 |
| 6 | Івано-Франківськ | 366 | 901 | 1171 | 431 | 1119 | 0 | 561 | 618 | 1402 | 328 | 135 | 747 | 627 |
| 7 | Київ | 256 | 533 | 727 | 131 | 607 | 561 | 0 | 298 | 811 | 388 | 550 | 490 | 489 |
| 8 | Кропивницький | 316 | 294 | 520 | 407 | 303 | 618 | 298 | 0 | 668 | 664 | 710 | 174 | 294 |
| 9 | Луганськ | 1057 | 394 | 148 | 1182 | 365 | 1402 | 811 | 668 | 0 | 1199 | 1379 | 857 | 977 |
| 10 | Луцьк | 382 | 805 | 1111 | 257 | 681 | 328 | 388 | 664 | 1199 | 0 | 152 | 780 | 856 |
| 11 | Львів | 360 | 975 | 1221 | 423 | 833 | 135 | 550 | 710 | 1379 | 152 | 0 | 850 | 970 |
| 12 | Миколаїв | 471 | 343 | 611 | 677 | 377 | 747 | 490 | 174 | 857 | 780 | 850 | 0 | 120 |
| 13 | Одеса | 428 | 468 | 731 | 557 | 497 | 627 | 489 | 294 | 977 | 856 | 970 | 120 | 0 |
| 14 | Полтава | 593 | 196 | 390 | 468 | 270 | 898 | 337 | 246 | 474 | 725 | 891 | 420 | 540 |

Додаток 2

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|--------------|-----|------|------|-----|------|------|-----|-----|------|------|------|-----|------|
| 15 | Рівне | 311 | 957 | 1045 | 187 | 925 | 296 | 318 | 627 | 1129 | 70 | 232 | 864 | 741 |
| 16 | Сімферополь | 844 | 446 | 591 | 803 | 365 | 1070 | 972 | 570 | 739 | 1052 | 1173 | 282 | 392 |
| 17 | Суми | 602 | 430 | 706 | 477 | 477 | 908 | 346 | 506 | 253 | 734 | 896 | 681 | 800 |
| 18 | Тернопіль | 232 | 877 | 1100 | 298 | 977 | 134 | 427 | 547 | 1289 | 159 | 128 | 754 | 660 |
| 19 | Ужгород | 575 | 1130 | 1391 | 671 | 1488 | 280 | 806 | 883 | 1539 | 413 | 261 | 999 | 1009 |
| 20 | Харків | 734 | 213 | 335 | 690 | 287 | 1040 | 478 | 387 | 333 | 866 | 1028 | 556 | 831 |
| 21 | Херсон | 521 | 376 | 560 | 624 | 297 | 798 | 551 | 225 | 806 | 869 | 1141 | 51 | 171 |
| 22 | Хмельницький | 120 | 765 | 988 | 185 | 875 | 246 | 315 | 435 | 1177 | 263 | 240 | 590 | 548 |
| 23 | Черкаси | 343 | 324 | 547 | 321 | 405 | 709 | 190 | 126 | 706 | 578 | 740 | 300 | 420 |
| 24 | Чернівці | 312 | 891 | 1141 | 389 | 957 | 143 | 538 | 637 | 1292 | 336 | 278 | 642 | 515 |
| 25 | Чернігів | 396 | 672 | 867 | 271 | 747 | 701 | 149 | 363 | 951 | 949 | 690 | 640 | 529 |

Відстані між містами України

| | Місто | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|-----------|-----|------|-----|-----|------|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| 1 | Вінниця | 593 | 311 | 844 | 602 | 232 | 575 | 734 | 521 | 120 | 343 | 312 | 396 |
| 2 | Дніпро | 196 | 957 | 446 | 430 | 877 | 1130 | 213 | 376 | 765 | 324 | 891 | 672 |
| 3 | Донецьк | 390 | 1045 | 591 | 706 | 1100 | 1391 | 335 | 560 | 988 | 547 | 1141 | 867 |
| 4 | Житомир | 468 | 187 | 803 | 477 | 298 | 671 | 690 | 624 | 185 | 321 | 389 | 271 |
| 5 | Запоріжжя | 270 | 925 | 365 | 477 | 977 | 1488 | 287 | 297 | 875 | 405 | 957 | 747 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| 6 | Івано-Франківськ | 898 | 296 | 1070 | 908 | 134 | 280 | 1040 | 798 | 246 | 709 | 143 | 701 |
| 7 | Київ | 337 | 318 | 972 | 346 | 427 | 806 | 478 | 551 | 315 | 190 | 538 | 149 |
| 8 | Кропивницький | 246 | 627 | 570 | 506 | 547 | 883 | 387 | 225 | 435 | 126 | 637 | 363 |
| 9 | Луганськ | 474 | 1129 | 739 | 253 | 1289 | 1539 | 333 | 806 | 1177 | 706 | 1292 | 951 |
| 10 | Луцьк | 725 | 70 | 1052 | 734 | 159 | 413 | 866 | 869 | 263 | 578 | 336 | 949 |
| 11 | Львів | 891 | 232 | 1173 | 896 | 128 | 261 | 1028 | 1141 | 240 | 740 | 278 | 690 |
| 12 | Миколаїв | 420 | 864 | 282 | 681 | 754 | 999 | 556 | 51 | 590 | 300 | 642 | 640 |
| 13 | Одеса | 540 | 741 | 392 | 800 | 660 | 1009 | 831 | 171 | 548 | 420 | 515 | 529 |
| 14 | Полтава | 0 | 665 | 635 | 261 | 825 | 1149 | 141 | 471 | 653 | 279 | 892 | 477 |
| 15 | Рівне | 665 | 0 | 1157 | 664 | 162 | 484 | 805 | 834 | 193 | 508 | 331 | 458 |
| 16 | Сімферополь | 635 | 1157 | 0 | 896 | 1097 | 1363 | 652 | 221 | 964 | 696 | 981 | 1112 |
| 17 | Суми | 261 | 664 | 896 | 0 | 774 | 1138 | 190 | 732 | 662 | 540 | 883 | 350 |
| 18 | Тернопіль | 825 | 162 | 1097 | 774 | 0 | 338 | 987 | 831 | 112 | 575 | 176 | 568 |
| 19 | Ужгород | 1149 | 484 | 1363 | 1138 | 338 | 0 | 1299 | 1065 | 455 | 984 | 444 | 951 |
| 20 | Харків | 141 | 805 | 652 | 190 | 987 | 1299 | 0 | 576 | 854 | 420 | 1036 | 608 |
| 21 | Херсон | 471 | 834 | 221 | 732 | 831 | 1065 | 576 | 0 | 641 | 351 | 713 | 691 |
| 22 | Хмельницький | 653 | 193 | 964 | 662 | 112 | 455 | 854 | 641 | 0 | 463 | 190 | 455 |
| 23 | Черкаси | 279 | 508 | 696 | 540 | 575 | 984 | 420 | 351 | 463 | 0 | 660 | 330 |
| 24 | Чернівці | 892 | 331 | 981 | 883 | 176 | 444 | 1036 | 713 | 190 | 660 | 0 | 695 |
| 25 | Чернігів | 477 | 458 | 1112 | 350 | 568 | 951 | 608 | 691 | 455 | 330 | 695 | 0 |

